



ce
pre
UNI

Aritmética

NUMEROS PRIMOS

CICLO
preuniversitario
2024 - I



LOS NÚMEROS PRIMOS Y LA SEGURIDAD INFORMÁTICA

Los números primos suelen utilizarse en la seguridad informática, específicamente con el llamado sistema RSA. Este algoritmo se desarrolló en el MIT([Instituto Tecnológico de Massachusetts](https://www.mit.edu/)) es uno de los más usados en el cifrado de datos y se basa en dado un número este se debe acomodar como un arreglo de números primos.



Los ataques cibernéticos son cada vez más frecuentes en el mundo y nuestro país no es ajeno a ello. Por ello, se creó la carrera de Ingeniería de Ciberseguridad.

Esta contraseña utiliza
4 números primos

(5) (43)(929)(71)

Proyecto LUPIC (Leading University Project for International Cooperation), que ejecutan la Universidad Nacional de Ciencia y Tecnología de Seúl (SeoulTech) y la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI)



La carrera de ciberseguridad está diseñada para formar profesionales altamente capacitados en identificar y mitigar los riesgos de seguridad en el mundo digital, por ello, la Facultad de Ingeniería y Eléctrica y Electrónica (FIEE) de la UNI implementó la carrera profesional de Ingeniería de Ciberseguridad.

Esta carrera permite al estudiante convertirse en un especialista en la protección de datos e información que circula dentro de las redes y se almacena en los sistemas, algo muy requerido en estos días, donde los ciberataques son constantes. Además, aprenden a comprender el panorama de amenazas y a desarrollar estrategias efectivas para prevenir, detectar y responder a ataques cibernéticos

NÚMEROS PRIMOS

En el conjunto $\mathbb{Z}$, un entero p es primo si admite sólo cuatro divisores ± 1 y $\pm p$.

Ejemplo: 47 y -23 son números primos

- Divisores enteros de 47 : ± 1 y ± 47
- Divisores enteros de -23 : ± 1 y ± 23

Nota: En $\mathbb{Z}$, si p es primo, $-p$ también es primo

NÚMEROS COMPUESTOS

Es todo **entero no nulo** $\mathbb{Z}$ que posee más de cuatro divisores.

Ejemplo:

25 y -14
son compuestos

- Divisores enteros de 25 : ± 1 ; ± 5 y ± 25
- Divisores enteros de -14 : ± 1 ; ± 2 ; ± 7 y ± 14



EUCLIDES

Teorema de Euclides: Existen infinitos números primos

- Euclides, en su libro “los Elementos” demostró que existen infinitos primos. Suponiendo que existe una cantidad finita de primos, llegaremos a una contradicción que invalida esta hipótesis.

supongamos que el conjunto de los números primos es **finito con n elementos**:

Sean entonces: $p_1, p_2, \dots, p_n$, todos los primos naturales

$$0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n$$

Definimos el número $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ y $P_k = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$

N es el producto de todos los números primos más 1

Si dividimos N por cualquiera de los primos del conjunto vemos que el resto es 1. Es decir, N no tiene como divisor a ninguno de estos primos, si N fuese primo habríamos encontrado un elemento más del conjunto de los números primos y no hay más. Por tanto, N no es primo y debe tener algún divisor primo, algo que hemos visto que es imposible porque la división por cualquier número primo siempre da resto 1. Por contradicción la hipótesis es incorrecta, por lo cual existen infinitos números primos.

APLICACIÓN 1

Determine la cantidad de números primos que se representan con tres cifras en el sistema cuaternario, si la suma de sus cifras en base diez también es un número primo.

A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8

RESOLUCIÓN:

Sea $N = \overline{abc}_4$, entonces

$$4^2 \leq \overline{abc}_4 < 4^3$$



$$16 \leq N < 64$$



$$N = 17, 19, 23, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61$$

Elegimos los primos que cumplen dicha condición



23, 41, 43,
47, 61

Cantidad de números: 5

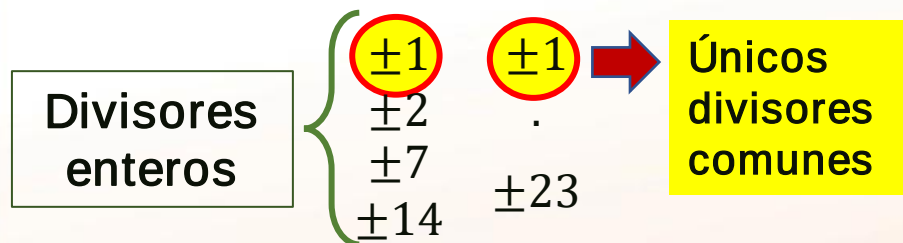
Respuesta: B

Números primos entre sí (PESI)

Dos o más enteros no nulos son PESI (coprimos o primos relativos) si sus únicos divisores comunes son el ± 1 .

Ejemplo:

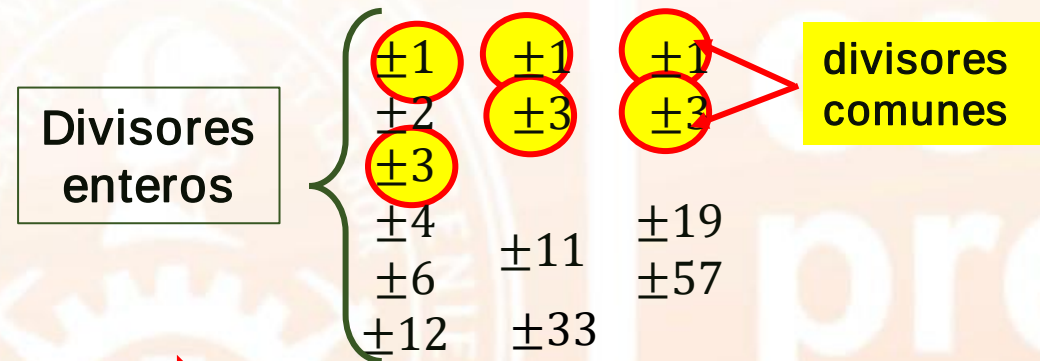
• ¿14 y 23 son PESI?



➡ 14 y 23 son PESI

Nota:

• ¿12, 33 y 57 son PESI?



➡ 12, 33 y 57 no son PESI

Si nos dicen que N y 12 son PESI, entonces sus únicos divisores comunes deben ser ± 1 y como el 12 tiene como divisores primos al 2 y 3, entonces N no debe ser múltiplo de 2 ni de 3.

NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ 2 A 2

Tres o más enteros no nulos son PESI 2 a 2 cuando al ser tomados de 2 en 2 cada pareja de números resultan ser PESI.

Ejemplo

- ¿22; -25 y 27 son PESI 2 a 2?

22 y -25 son PESI

22 y 27 son PESI

-25 y 27 son PESI

➡ 22; 25 y 77 son PESI 2 a 2

- ¿18; -49 y 91 son PESI 2 a 2?

-49 y 91 no son PESI, porque además del ± 1 , comparten al ± 7 como divisores comunes

➡ 18; -49 y 91 no son PESI 2 a 2

Nota:

Si un conjunto de números son PESI 2 a 2, entonces son PESI, lo contrario no siempre se cumple.

APLICACIÓN 2

Si los números $\overline{5m}$, 27 y 45 son números PESI, determine la suma de los valores de m .

A) 15

B) 20

C) 25

D) 30

E) 33

Resolución:

De los números 27 y 45:

$$27 \rightarrow \overline{= \dot{3}}$$

$$45 \rightarrow \begin{matrix} \overline{= \dot{3}} \\ \overline{= \dot{5}} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \overline{5m} \rightarrow \neq \dot{3}$$

$$\rightarrow m = 0, 2, 3, 5, 6, 8, 9$$

Suma de valores:

33

Respuesta: E

Propiedades

1. 1 y -1 es PESI con cualquier número entero.
2. Dado un conjunto de números, si dos de ellos son PESI, entonces todo el conjunto de números serán PESI.
3. Dos o más impares consecutivos siempre son PESI.
4. Dos o más números consecutivos siempre son PESI.
5. Si A y B son PESI, entonces
 - A y $(A \pm B)$ son PESI
 - $(A \pm B)$ y $A \times B$ son PESI
 - A^n y $(A^n \pm B^n)$ son PESI.

Ejemplo: ¿Los números $\overline{abc23}$ y $\overline{abc48}$ son PESI?

Veamos

Como $\overline{abc23}$ y 25 son PESI, entonces $\overline{abc23}$ y $(\overline{abc23} + 25)$ son PESI

$\overline{abc48}$

Propiedad de la linealidad de los coprimos

Dos números enteros no nulos a y b son primos entre sí, si y solo si, existen dos números enteros m y n tales que: $ma + nb = 1$.

Ejemplo

12 y -35 son PESI →
$$\begin{cases} 12(3) + (-35)(1) = 1 \\ 12(-32) + (-35)(-11) = 1 \end{cases}$$

**Los enteros m y n
no son únicos**

-21 y 91 no son PESI →
$$\underbrace{-21}_{\substack{\circ \\ 7}}(m) + \underbrace{91}_{\substack{\circ \\ 7}}(n) \neq 1$$

En el conjunto de los naturales ($\mathbb{N}$)

 $\mathbb{N}$

- La unidad: Es el único número natural que posee un divisor.
- Números primos: Son aquellos que admiten dos divisores, la unidad y el mismo número.
Primeros números primos: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; ...
- Números compuestos: Son aquellos que tienen más de dos divisores.
Primeros números compuestos: 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; ...

Se concluye:

- ♠ El único número primo que es par es el 2 todos los demás son impares.
- ♠ Los únicos naturales consecutivos y primos a la vez son 2 y 3.
- ♠ La única terna de impares consecutivos y primos a la vez son 3, 5 y 7.
- ♠ Si $p > 2$ es primo, entonces $p = 2 \pm 1$, lo contrario no siempre se cumple.
- ♠ Si $p > 3$ es primo, entonces $p = 6 \pm 1$, lo contrario no siempre se cumple.

APLICACIÓN 3

Dados los siguientes números primos: $4n - 18$; $3n + 2$ y $5n - 2$, determine la suma de los números primos no considerados entre el menor y mayor de los primos indicados.

A) 50

B) 52

C) 54

D) 58

E) 61

Resolución:

El único primo par es el 2, de los primos indicados, $4n - 18$ es par y dado que es primo entonces $4n - 18 = 2$, se obtiene $n = 5$

**Reemplazando: 2, 17 y 23**

Luego, los primos no considerados son:

3, 5, 7, 11, 13 y 19**La suma de los números es 58.**

El único
primo que
es par es el
2

Respuesta : D

Criba de Eratóstenes

Es un proceso mediante el cual se puede determinar, la sucesión de los números primos.

Ejemplo Para determinar los números primos desde el 1 al 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Primero se elimina el 1
 - Luego se eliminan los múltiplos de 2 a partir de 2^2
 - Después se eliminan los múltiplos de 3 a partir de 3^2
- Así sucesivamente con todos los múltiplos de los números primos

Los números que queden sin eliminar serán primos

Existen 25 números primos menores que 100

Algunas fórmulas especiales de primos

NOTA: No se ha determinado la ley según la cual se forman y suceden los números primos.

Euler ha encontrado algunas fórmulas que son válidas hasta ciertos límites; para determinar números primos así:

$$x^2 + x + 41 \text{ desde } x = 0 \text{ hasta } x = 39$$

$$x^2 + x + 17 \text{ desde } x = 0 \text{ hasta } x = 15$$

$$x^2 + x + 29 \text{ desde } x = 0 \text{ hasta } x = 27$$

Fermat $2^{2^n} + 1$ da algún número primo (**Primos de Fermat**)

$$\text{Si } n = 0 \Rightarrow 3$$

$$\text{Si } n = 1 \Rightarrow 5$$

$$\text{Si } n = 2 \Rightarrow 17$$

$$\text{Si } n = 3 \Rightarrow 257$$

$$\text{Si } n = 4 \Rightarrow 65\,537$$

Euler probó que para $n=5$ no es primo.

$$n = 5, \quad 2^{2^5} + 1 = \frac{o}{641}$$

Algoritmo para saber si un número es primo

Ejemplo: ¿El número 239 es primo?

Paso 1: Se extrae la raíz cuadrada del número, si es exacta el número no es primo.

$$\sqrt{239} = 15,45 \dots$$

Paso 2: Se consideran todos los números primos menores iguales que la parte entera de la raíz cuadrada.

$$2; 3; 5; 7; 11; 13 \leq 15$$

Paso 3: Se divide el número entre cada primo obtenido en el paso 2, si todas las divisiones son inexactas el número será primo.

• $239 = \overset{\circ}{2} + 1$	• $239 = \overset{\circ}{7} + 1$
• $239 = \overset{\circ}{3} + 2$	• $239 = \overset{\circ}{11} + 8$
• $239 = \overset{\circ}{5} + 4$	• $239 = \overset{\circ}{13} + 5$



Como todas las divisiones son inexactas, entonces 239 es primo

APLICACIÓN 4

Para averiguar si un número natural menor que 300 es primo se pensaba realizar siete divisiones, pero faltando una división se determinó que el número es compuesto. Calcule la suma de cifras de dicho número.

- A) 16 B) 18 **C) 20** D) 22 E) 24

Resolución: Sea N el número natural

Como se pensaba realizar 7 divisiones, entonces se debía dividir entre: 2, 3, 5, 7, 11, **13** y 17

Faltando una división se determinó que el número es compuesto

$$\rightarrow 17 < \sqrt{N} < 19$$

$$\rightarrow 289 < N = 13k < 361$$

$$22, \dots < k < 27, \dots$$

$$k \neq \overset{\circ}{2}, \overset{\circ}{3}, \overset{\circ}{5}, \overset{\circ}{7} \rightarrow N = 13 \times 23 = 299$$

$$\text{Suma de cifras} = 2 + 9 + 9 = 20$$

Respuesta: C

Teorema fundamental de la Aritmética (Teorema de Gauss)

Todo entero positivo mayor que la unidad, se puede expresar como un producto de factores primos positivos elevados a ciertos exponentes que son enteros positivos de manera única, esta descomposición es llamada la descomposición canónica (DC) del número.

Es decir

Si $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma$ es la DC de N , entonces a, b y c son números primos diferentes y α, β y γ son enteros positivos.

Ejemplo:

- $1200 = 2^4 \times 3^1 \times 5^2 \dots (DC)$
- $18^{n+2} - 18^n = 18^n(18^2 - 1) = 2^n \times 3^{2n} \times 17 \times 19 \dots (DC)$
- $\underbrace{3200..00_6}_{n \text{ cifras}} = 32_6 \times 6^n = 20 \times 2^n \times 3^n \quad \rightarrow \quad \underbrace{3200..00_6}_{n \text{ cifras}} = 2^{n+2} \times 3^n \times 5 \dots (DC)$

Estudio de los divisores de un número entero positivo

Tabla de divisores

Ejemplo: Elaborar la tabla de divisores de $72 = 2^3 \times 3^2 \dots (D.C.)$

		Divisores de 2^3				
		1	2^1	2^2	2^3	
Divisores de 3^2	1	1	2	4	8	$\rightarrow 1 + 2 + 2^2 + 2^3$
	3^1	3	6	12	24	$\rightarrow 3(1 + 2 + 2^2 + 2^3)$
	3^2	9	18	36	72	$\rightarrow 3^2(1 + 2 + 2^2 + 2^3)$

La cantidad de divisores de un número se obtiene multiplicando el número de filas por el número de columnas

$$\left(\begin{array}{c} \text{Suma de} \\ \text{divisores} \\ \text{de } 72 \end{array} \right) = (1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3 + 3^2)$$

Cantidad de divisores positivos (CD)

Sea N un número que descompuesto en su forma canónica es:

$$N = a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\gamma} \dots (D.C.)$$

Divisores positivos

$$\begin{cases} 1 & 1 & 1 \\ a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a^{\alpha} & b^{\beta} & c^{\gamma} \end{cases}$$

Para obtener un divisor de N se elige un elemento de cada columna y los multiplicamos

$$CD(N) = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$$

Nota:

Observación:

Divisores de 18:

Divisores primos
1; 2; 3; 6; 9; 18
Divisores compuestos

$$CD(N) = 1 + \underbrace{CD(N)}_{\text{primos}} + \underbrace{CD(N)}_{\text{compuestos}}$$

$$CD(N) = \underbrace{CD(N)}_{\text{propios}} - 1$$

$$\text{También } CD(N) = 2 \cdot \underbrace{CD(N)}_{\text{enteros}}$$

Un número es cuadrado si y solo si tiene una cantidad impar de divisores positivos

APLICACIÓN 5

Si el número $N = \overline{abcabc}$ es múltiplo de 225, tiene 5 divisores primos y tiene 192 divisores enteros (positivos y negativos). Dar como respuesta la suma de cifras del número que cumple dichas condiciones.

- A) 36 B) 38 C) 40 D) 42 E) 44

Resolución:

$$N = \overline{abcabc} \begin{cases} = 2^5 \\ = 3^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \overline{abcabc} = 1001 \overline{abc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abc}$$

$$= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \underbrace{3^2 \cdot 5^2 \cdot M}$$

$$100 < 3^2 \cdot 5^2 \cdot M < 1000$$

$$0,4 < M < 4,4$$

$$\rightarrow M = 3$$

$$N = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

$$N = 675675$$

$$CD(N) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 = 96$$

Tiene 96 divisores positivos

Suma de cifras del número N : 36

Respuesta: A

Suma de divisores positivos (SD)

Sea N un número que descompuesto en su forma canónica es:

$$N = a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\gamma} \dots (D.C.)$$

Divisores positivos

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 1 \\ a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a^{\alpha} & b^{\beta} & c^{\gamma} \end{matrix}$$

Para obtener la suma de divisores sumamos los valores que hay en cada columna y los multiplicamos

$$SD(N) = (1 + a + a^2 + \dots + a^{\alpha})(1 + b + b^2 + \dots + b^{\beta})(1 + c + c^2 + \dots + c^{\gamma})$$

También

$$SD(N) = \left(\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \right) \left(\frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \right) \left(\frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \right)$$

Observación: Si $SD(N) = N + 1$, entonces N es primo.

Suma de las inversas de los divisores positivos (SID)

Ejemplo: Determine la suma de las inversas de los divisores de 18

(Divisores de 18): 1; 2; 3; 6; 9; 18 $\Rightarrow SID(18) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$

$\Rightarrow SID(18) = \frac{18 + 9 + 6 + 3 + 2 + 1}{18} = \frac{SD(18)}{18}$ **En general**

$$SID(N) = \frac{SD(N)}{N}$$

Producto de los divisores positivos (PD)

Ejemplo: Determine el producto de los divisores de 18

$$PD(18) = 1 \times 2 \times 3 \times 6 \times 9 \times 18$$

$$= 18^3 \circ \circ$$

$$\frac{CD(18)}{2}$$

En general

$$PD(N) = N^{\frac{CD(N)}{2}} = \sqrt{N^{CD(N)}}$$

Nota: Con respecto a los divisores positivos de un número N se cumple

**Media
aritmética**

$$MA = \frac{SD(N)}{CD(N)}$$

**Media
geométrica**

$$MG = \sqrt[CD(N)]{PD(N)} = \sqrt{N}$$

**Media
armónica**

$$MH = \frac{CD(N)}{SID(N)} = \frac{N \cdot CD(N)}{SD(N)}$$

Además se verifica que:

$$MA \times MH = (MG)^2$$

Propiedad: Si A y B son PESI, entonces

$$CD(A \times B) = CD(A) \cdot CD(B)$$

$$SD(A \times B) = SD(A) \cdot SD(B)$$

$$SID(A \times B) = SID(A) \cdot SID(B)$$

$$PD(A \times B) = PD(A) \cdot PD(B)$$

APLICACIÓN 6

Sea S la suma de divisores positivos del 4124. Determine la cantidad de divisores positivos que son múltiplos de 3 del número S .

A) 4

B) 8

C) 10

D) 12

E) 14

Resolución:

$$4124 = 2^2 \times 1031$$

$$S = SD(4036) = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} \times \frac{1031^2 - 1}{1031 - 1}$$

$$S = 7 \times 1032 = 7 \times 3 \times 43$$

$$CD(\dot{3}) = 2 \times 2 = 4$$

Respuesta A

APLICACIÓN 7

Un número tiene solo 2 divisores enteros positivos primos y 12 divisores enteros positivos compuestos. La suma de todos sus divisores naturales es 403. Si la suma de las inversas de sus divisores naturales del número es M , calcular la suma de cifras de $M \times 288$.

A) 4

B) 8

C) 10

D) 12

E) 14

Resolución:

$$N = a^\alpha \times b^\beta \rightarrow CD(N) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{primos}}}{2} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{compuestos}}}{12} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{unidad}}}{1} = 15$$

$$CD = 3 \times 5 = (2 + 1) \times (4 + 1) \rightarrow N = a^2 b^4$$

$$SD = 403 = 13 \times 31 = \frac{3^3 - 1}{3 - 1} \times \frac{2^5 - 1}{2 - 1}$$

$$N = 3^2 \times 2^4 = 144$$

$$SID = \frac{403}{144} = M$$

$$M \times 288 = 806$$

Suma de cifras 14

Respuesta E

Número de formas de escribir un número natural como el producto de dos factores naturales

Ejemplo: ¿De cuántas formas diferentes se puede escribir 60 y 36 como el producto de dos factores enteros positivos?

$$60 = A \times B$$

	↓	↓
6 formas	1	60
	2	30
	3	20
	4	15
	5	12
	6	10
	10	6
	12	5
	15	4
	20	3
30	2	
60	1	

Son las
mismas
parejas

$$36 = A \times B$$

	↓	↓
5 formas	1	36
	2	18
	3	12
	4	9
	6	6
	9	4
	12	3
	18	2
	36	1

Son las
mismas
parejas

En general Si A y B son naturales

$$\left(\begin{array}{c} \text{Número de formas} \\ \text{de expresar } N = A \times B \end{array} \right) = \begin{cases} \frac{CD(N)}{2}, & \text{si } CD(N) \text{ es par} \\ \frac{CD(N) + 1}{2}, & \text{si } CD(N) \text{ es impar} \end{cases}$$

Nota: Si A y B son PESI, entonces

$$\left(\begin{array}{c} \text{Número de formas} \\ \text{de expresar } N = A \times B \end{array} \right) = 2^{CD_{\text{primos}}(N)-1}$$

APLICACIÓN 8

Determine el número de triángulos rectángulos no isósceles de lados enteros y cuya área de la región triangular mide $1\,800\text{ cm}^2$.

A) 14

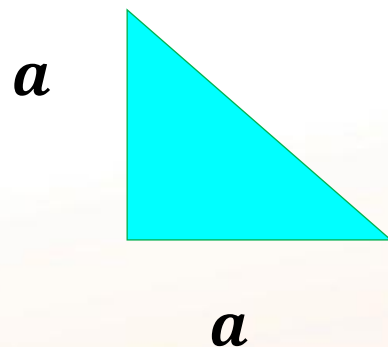
B) 18

C) 20

D) 22

E) 24

Resolución:



$$A = \frac{a \times a}{2} = 1800 \rightarrow a \cdot a = 3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$a = 60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Solo existe 1
triángulo
rectángulo
isósceles

$$CD(3600) = (4 + 1)(2 + 1)(2 + 1) = 45$$

Número de triángulos: $\frac{45 + 1}{2} = 23$

Triángulos rectángulos No
isósceles: $23 - 1 = 22$

Respuesta D

Descomposición canónica de un factorial

Ejemplo: $22! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22$

➔ $22! = 2^{19} \times 3^9 \times 5^4 \times 7^3 \times 11^2 \times 13 \times 17 \times 19 \dots (DC)$

Para conocer el exponente de un divisor primo que está contenido en $n!$ se realizan divisiones sucesivas de n , entre dicho primo, y el exponente del número primo es la suma de los cocientes obtenidos.

Ejemplo: Calcule $a + b + c$, si $45! = 2^a \times 3^b \times 5^c \times \dots (DC)$

$$\begin{array}{r}
 45 \div 2 = 22 \\
 22 \div 2 = 11 \\
 11 \div 2 = 5 \\
 5 \div 2 = 2 \\
 2 \div 2 = 1
 \end{array}$$

$a = 41$

$$\begin{array}{r}
 45 \div 3 = 15 \\
 15 \div 3 = 5 \\
 5 \div 3 = 1
 \end{array}$$

$b = 21$

$$\begin{array}{r}
 45 \div 5 = 9 \\
 9 \div 5 = 1
 \end{array}$$

$c = 10$

➔ $a + b + c = 72$

Nota

La cantidad de ceros en que termina un factorial en base n , estará dado por la mayor potencia de la base n que está contenida en el factorial.

APLICACIÓN 9

En el producto de los 700 primeros números naturales. Determine el número de divisores que solo admiten como divisor primo a 7.

A) 114

B) 116

C) 118

D) 122

E) 122

Resolución:

$$N = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 700 = 700!$$

$$N = 2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 5^{\theta} \times 7^{\gamma} \dots$$

Determinando el exponente de 7

$$\begin{array}{r}
 700 \div 7 = 100 \\
 100 \div 7 = 14 \\
 14 \div 7 = 2
 \end{array}$$



$$N = 2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 5^{\theta} \times 7^{116} \times \dots$$

Número de divisores que solo admiten como divisor primo a 7

116 números

Respuesta B

Función de Euler o indicador de un número natural $\varphi(N)$

Para un número natural N , el valor de $\varphi(N)$, se define como la cantidad de números naturales m menores o iguales que N y primo relativo con N , formalmente:

$$\varphi(N) = \text{card}(\{m \in \{1; 2; \dots; N\} : \text{mcd}(m; N) = 1\})$$

Ejemplos

Si P es primo entonces

- $\varphi(P) = P - 1$
- $\varphi(P^\alpha) = P^\alpha - P^{\alpha-1}$

$$\varphi(7) = 6 = 7 - 1$$

$$\varphi(11) = 10 = 11 - 1$$

$$\varphi(8) = 4 = 2^3 - 2^2$$

$$\varphi(9) = 6 = 3^2 - 3^1$$

Sea $N = a^\alpha \times b^\beta \dots (DC)$

$$\varphi(N) = N \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right)$$

La cual es equivalente a

$$\varphi(N) = a^{\alpha-1}(a-1)b^{\beta-1}(b-1)$$

Ejemplo

$$\varphi(28) = \varphi(2^2)\varphi(7) = 2 \cdot 6 = 12$$

$$\varphi(200) = \varphi(2^3)\varphi(5^2) = 2^2(2-1)5(5-1) = 80$$



Leonhard Euler

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Nota: Si a y N son PESI, con $1 \leq a < N$, entonces $(a + N)$ y N también son PESI, donde $N < a + N < 2N$



$\varphi(N)$ también nos dice, la cantidad de números PESI con N que existen entre dos múltiplos consecutivos de N .

(cantidad de números PESI con N) $\rightarrow$ $\underbrace{1; 2; 3; \dots; (N-1); N}_{\varphi(N)}; \underbrace{(N+1); \dots; (2N-1); 2N}_{\varphi(N)}; \underbrace{(2N+1); \dots; (3N-1); 3N}_{\varphi(N)}; \dots$

Propiedades

1. $\varphi(N)$ es par $\forall N > 2$, los únicos casos donde sale impar es cuando $N = 1; 2$
2. Si A y B son PESI, entonces $\varphi(A \times B) = \varphi(A) \times \varphi(B)$
3. La cantidad de parejas de naturales que son PESI y que sumados dan $N > 2$, es igual a $\frac{\varphi(N)}{2}$
4. Si $N > 2$, la suma de todos los números naturales menores que N y PESI con N , está dada por $\frac{N \times \varphi(N)}{2}$.

APLICACIÓN 10

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El número de parejas de números naturales PESI que sumados dan 20 es igual a $\frac{\phi(20)}{2}$.

II. Todo número natural es mayor que su correspondiente indicador de Euler.

III. Entre $\overline{mn0}$ y $\overline{m(n+2)0}$ hay 8 números PESI con 10.

A) VFV

B) VVV

C) FFF

D) FFV

E) VVF

Resolución:

$$I. \phi(20) = 2^{2-1}(2-1) \cdot 5^{1-1}(5-1) = 8$$

$$\rightarrow \frac{\phi(20)}{2} = 4$$

Parejas de números PESI:

1 y 19 , 3 y 17 , 7 y 13 , 9 y 11

Verdadero

II. Por convención: $\phi(1) = 1$.

Falso

III. Dado que $\phi(10) = 4$

Entre $\overline{mn0}$ y $\overline{m(n+2)0}$ hay 8 números PESI con 10

Verdadero

Respuesta A

APLICACIÓN 11

Del 150 al 420, ¿cuántos números no son PESI con 90^{2023} ?

A) 197

B) 198

C) 199

D) 200

E) 201

Resolución:

Como $90 = 2 \times 3^2 \times 5$ $\rightarrow$ Decir PESI con 90^{2023} , equivale decir que son PESI con $30 = 2 \times 3 \times 5$

$\left(\begin{array}{l} \text{cantidad de} \\ \text{números} \\ \text{PESI con } 30 \end{array} \right) \rightarrow$

$5(30)$ 150 , 151, ..., 179,	$6(30)$ 180 , 181, ..., 209,	$7(30)$ 210 , ..., 390 ,	$13(30)$ 391, ..., 419,	$14(30)$ 420
$\phi(30)$	$\phi(30)$	...	$\phi(30)$	

$= \phi(2)\phi(3)\phi(5) = 1 \times 2 \times 4 = 8$

$\rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{cantidad de} \\ \text{números} \\ \text{PESI con } 30 \\ \text{que hay del 150 al 420} \end{array} \right) = (14 - 5) \phi(30) = 9 \times 8 = 72$

Pues tienen los mismos divisores primos

No son PESI con 90: 199 números

Respuesta C

Teoremas importantes

Pequeño Teorema de Fermat	Congruencia de Euler y Fermat	Teorema de Wilson (Test de primalidad)
Si N y $p \in \mathbb{N}$ y p es un número primo, entonces $N^p - N = \overset{\circ}{p}$ Ejemplo 5 es primo y $12 \in \mathbb{N}$, entonces $12^5 - 12 = \overset{\circ}{5}$	Sean N y $p \in \mathbb{N}$ y son PESI, entonces $N^{\varphi(p)} = \overset{\circ}{p} + 1$ Sea p primo y $a > 1$. $\varphi(p^a) = p^{a-1}(p - 1)$.	p es un número primo, si y solo si $(p - 1)! = \overset{\circ}{p} - 1$ Ejemplo 7 es primo, entonces $(7 - 1)! = 720 = \overset{\circ}{7} - 1$
Corolario Si N y p son PESI y p es un número primo, entonces $N^{p-1} = \overset{\circ}{p} + 1$	Ejemplo 338 y 25 son PESI entonces, $338^{\varphi(25)} = 338^{20} = 25 + 1$	Corolario Si P es un número primo, entonces $(p - 2)! = \overset{\circ}{p} + 1$ $(p - 3)! = \overset{\circ}{p} + \left(\frac{p-1}{2}\right)$

APLICACIÓN 12

Al dividir $N^{3\,301\,536}$ entre 2023 se obtiene R como residuo. Determine la suma de cifras de R , si N y 2 023 son PESI.

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución:

$$N^{3\,301\,536} = 2023 + R \quad \dots (*)$$

$$2023 = 7 \times 17^2$$

➔ $\phi(2023) = 7^0(7-1) \times 17(17-1) = 1\,632$

$$N^{\phi(2023)} = N^{1\,632} = 2023 + 1$$

$$N^{3\,301\,536} = (N^{1632})^{2023}$$

En (*) $(2023 + 1)^{2023} = 2023 + 1$

Por la
congruencia
de Euler y
Fermat

El pequeño teorema de
Fermat

Si p es un número primo
que no divide al entero
 a , entonces

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$



Respuesta A

APLICACIÓN 13

Calcule el residuo por exceso de dividir $(71!)^{feliznavidad2023}$ entre 73.
Dar como respuesta la suma de cifras.

- A) 1 B) 2 C) 5 D) 8 **E) 9**

Resolución:

Por el Teorema de Wilson:

$$(p - 2)! = p + 1$$

p
es primo

$$(73 - 2)! = 73 + 1$$

$$(71!)^E = (73 + 1)^E = 73 + 1 = 73 - 72$$

$$r = 1$$

$$\rightarrow r_e = 72$$

$$\sum \text{cifras} = 7 + 2 = 9$$

Respuesta E

APLICACIÓN 14

Si expresamos $N = 2020^{72!} + 35!$ en base 37, ¿en que cifra termina?

- A) 1 **B) 2** C) 5 D) 8 E) 9

Resolución

$$: N = 2020^{72!} + 35! = \dots x_{37} = \overset{\circ}{37} + x \quad (1)$$

- Como 2020 y 37 son PESI y 37 es primo $\rightarrow 2020^{36} = \overset{\circ}{37} + 1$

$$2020^{72!} = (2020^{36})^k = (\overset{\circ}{37} + 1)^k \rightarrow 2020^{72!} = \overset{\circ}{37} + 1 \quad (2)$$

- Como 37 es primo, por el corolario del teorema de Wilson $(37 - 2)! = \overset{\circ}{37} + 1$

$$\rightarrow 35! = \overset{\circ}{37} + 1 \quad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene $N = (\overset{\circ}{37} + 1) + (\overset{\circ}{37} + 1) = \overset{\circ}{37} + 2$

Por el corolario del
pequeño teorema de
Fermat

$$72! = 36 = 36k$$

Respuesta B

PROBLEMAS

PROBLEMA 121

Si $N = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4}$ tiene 20 divisores no primos. ¿Cuántos divisores primos tiene x ?

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

RESOLUCIÓN

$$N = 2^x [1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4] = 2^x [31]$$

$$CD(N) = 20 + 2 = 22 \rightarrow (x + 1)(2) = 22$$

$$x = 10 = 2 \times 5$$

$$CD[\text{primos}] = \mathbf{2}$$

PROBLEMA 122

¿Cuántos divisores de 2160 tienen como cifra de segundo orden al 1?

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7

RESOLUCIÓN

$$2160 = 6^3 \times 2 \times 5 = 2^4 \times 3^3 \times 5$$

divisores de 2160:

1	2	4	8	16
3	6	12	24	48
5	10	20	40	80
9	18	36	72	144
15	30	60	120	240
27	54	108	216	432
45	90	180	360	720
135	270	540	1080	2160

Son 6 divisores

PROBLEMA 123

Si N^3 tiene 70 divisores, entonces N^2 tiene como máximo $\overline{ab}$ divisores, determine cuantos divisores tiene $\overline{ba}$

A)3

B)4

C)5

D)6

E) 7

RESOLUCIÓN

$$N^3 = p^6 \times q^9 \rightarrow N = p^2 \times q^3 \rightarrow CD(N^2) = 35$$

$$N^3 = p^{69} \rightarrow N = p^{23} \rightarrow CD(N^2) = 47$$

$$\overline{ba} = 74 = 2 \times 37$$

$$CD[\overline{ba}] = \mathbf{4}$$

PROBLEMA 124

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si $N = n^4 + 4$ es primo entonces solo existe un único N natural que cumple dicha condición.

II. Los números $\overline{ab24}$ y $\overline{ab49}$ son PESI

III. Entre 1005 y 2005 existen 10 números primos

A) VFV

B) FFV

C) VVF

D) FFF

E) VVV

RESOLUCIÓN

$$I) \quad n^4 + 4 = [n^2 + 2n + 2][n^2 - 2n + 2] \rightarrow n = 1, N = 5 \quad (V)$$

$$II) \quad \overline{ab24} \text{ y } \overline{ab25} \text{ son PESI} \rightarrow \overline{ab24} \text{ y } (\overline{ab24} + \overline{ab25}) \text{ son PESI} \quad (V)$$

$$\overline{ab24} \text{ y } \overline{ab49} \text{ son PESI}$$

$$III) \quad \text{Existen más de 10 números primos en dicho rango} \quad (F)$$

PROBLEMA 125

¿Cuántos números de la forma $\overline{ab0ab}$ existen que sean iguales al producto de factores primos consecutivos?

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7

RESOLUCIÓN

$$\overline{ab0ab} = \overline{ab} \times 1001 = \overline{ab} \times 7 \times 11 \times 13$$

$$\overline{ab} = 3 \times 5, \quad \overline{ab} = 2 \times 3 \times 5, \quad \overline{ab} = 17, \quad \overline{ab} = 5 \times 17,$$

son **4** valores

PROBLEMA 126

Si la descomposición canónica del número $N = \overline{ababab}$ es $13 \cdot a \cdot b \cdot \overline{ab}^2$ calcular el valor de $a + b$

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 10

RESOLUCIÓN

$$\overline{ababab} = \overline{ab} \times 10101 = \overline{ab} \times 3 \times 13 \times 7 \times 37$$

$$a = 3 \quad b = 7$$

$$a + b = \mathbf{10}$$

PROBLEMA 127

Sea $N = 72^n \times 2700$. Si el número de divisores positivos de N está dado por un producto de factores consecutivos, calcule el valor de n , sabiendo que es el menor posible. A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN

$$N = 72^n \cdot 2700$$

$$\rightarrow DC(N) = 2^{3n+2} \cdot 3^{2n+3} \cdot 5^2$$

$$\rightarrow N^\circ \text{ Div}(N) = (3n+3)(2n+4)(3)$$

$$n = 3 \rightarrow 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3$$

$$\rightarrow 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$$

$$\therefore n = 3$$

Rpta. C

PROBLEMA 128

Al construir la tabla de divisores de un número que solo tiene 2 factores primos, resulta una tabla de 4x3 (4 filas y 3 columnas), determine la suma de divisores del número, sabiendo que el cociente del mayor elemento de la cuarta fila entre el menor elemento de la tercera fila es 175. A)12 000 B)12 100 C)12 200 D)12 300 E) 12 400.

RESOLUCIÓN

	1	p^1	p^2
1			
q^1			
q^2	q^2		
q^3			$q^3 \cdot p^2$

Dato:

$$\frac{q^3 \cdot p^2}{q^2} = 175$$

$$q^1 \cdot p^2 = 175$$

$$q \cdot p^2 = 7 \cdot 5^2$$

$$q = 7 \text{ y } p = 5$$

$$SD = (1 + 5^1 + 5^2)(1 + 7^1 + 7^2 + 7^3)$$

$$SD = (31)(400)$$

$$SD = 12400$$

Rpta. E

PROBLEMA 129

¿Cuántos divisores compuestos positivos debe tener $N = 2^k \cdot 3^{k+4}$ para que su raíz cuadrada tenga 8 divisores positivos?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 18

RESOLUCIÓN

$$\sqrt{N} = 2^{k/2} \cdot 3^{k/2+2}$$

$$\rightarrow \left(\frac{k}{2} + 1\right) \left(\frac{k}{2} + 3\right) = 8$$

$$\rightarrow (k + 2)(k + 6) = 4 \cdot 8$$

$$\rightarrow k = 2$$

$$CD(N) = DT - 1 - 2$$

$$CD(N) = 3 \cdot 7 - 1 - 2$$

$$CD(N) = 18$$

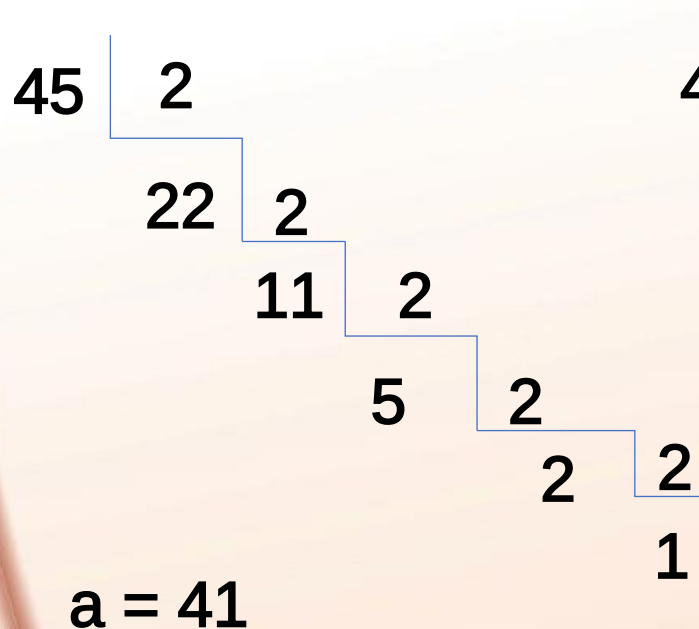
Rpta. E

PROBLEMA 130

Si $45! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot \dots \cdot 43^d$; es una descomposición canónica, calcule $a + b + c + d$

- A) 70 B) 71 C) 72 D) 73 E) 74

RESOLUCIÓN



$$a + b + c + d = 73$$

Rpta. D

PROBLEMA 131

Determine la suma de las 3 cifras de un número que tiene 21 divisores positivos.

A)16

B)17

C)18

D)19

E) 20

RESOLUCIÓN

N tiene 21 divisores $21 = 3 \times 7$

$$N = p^2 \times q^6$$

N tiene 3 cifras

$$N = 3^2 \times 2^6 = 576$$

$$\text{Suma de cifras} = 18$$

PROBLEMA 132

Determine un número que tenga 9 divisores, tal que, si disminuyen 9 unidades, se obtiene un múltiplo de 11 que tiene 4 divisores. La suma de cifras del número es

A)16

B)18

C)20

D)21

E) 22

RESOLUCIÓN

$$N - 9 = 11p, p: \text{primo}$$

$$N = 11p + 9$$

N tiene 9 divisores

$$N = 11 \times 17 + 9 = 196 = 2^2 \times 7^2$$

$$N = 196$$

$$\text{Suma de cifras} = 16$$

PROBLEMA 133

El producto de todos los divisores positivos de 2^{100} y 3^{100} es 6^k , determine la suma de cifras de k .

A) 9

B) 10

C) 11

D) 12

E) 13

RESOLUCIÓN

$$CD = 101$$

$$PD_1 = (2^{100})^{\frac{101}{2}} = 2^{5050}$$

$$PD_2 = (3^{100})^{\frac{101}{2}} = 3^{5050}$$

$$k = 5050$$

$$\text{Suma de cifras} = 10$$

PROBLEMA 134

Calcule la última cifra significativa de $100!$.

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

RESOLUCIÓN

$$100! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 100$$

Consideramos $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10 = ..800$

De manera análoga $\overline{n1} \times \overline{n2} \times \overline{n3} \times \cdots \times \overline{(n+1)0} = ..80..0$, para $n = 1, \dots, 9$

La última cifra significativa será:

$$\begin{aligned} 8^{10} &= (2^{10})^3 = (..4)^3 \\ &= ..4 \end{aligned}$$

PROBLEMA 135

Sea $N = 2020^{72!} + 35!$, si se escribe N en base 37, ¿en qué cifra termina?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 8

RESOLUCIÓN

$$2020^{36} = \overset{\circ}{3}7 + 1 \rightarrow 2020^{72!} = \overset{\circ}{3}7 + 1$$

$$(p - 2)! = \overset{\circ}{p} + 1 \rightarrow (37 - 2)! = \overset{\circ}{3}7 + 1$$

$$\therefore N = \overset{\circ}{3}7 + 2$$

Rpta. A

PROBLEMA 136

Al dividir 2^{98} entre 33, el residuo es $\overline{ab}$, determine la cantidad de divisores de $\overline{ba}$ primos entre sí con a .

- A) 1 B) 2 C) 5 D) 6 E) 7

RESOLUCIÓN

$$2^{10} = 33 + 1$$

$$2^{98} = 33 + 25 \rightarrow \overline{ba} = 52$$

Divisores de 52: 1, 2, 4, 13, 26 y 52

Divisores de 52 primos con 2.

Rpta. B

PROBLEMA 137

Si $\overline{ab}$ tiene 12 divisores y $(\overline{ab})^2$ tiene 33, determine la cantidad de divisores propios que tiene $(a + b)^2$.

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 8

RESOLUCIÓN

$$\overline{ab} = p^m \cdot q^n$$

$$(\overline{ab})^2 = p^{2m} \cdot q^{2n}$$

$$\left. \begin{aligned} (m+1)(n+1) &= 12 \\ (2m+1)(2n+1) &= 33 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} m &= 1 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

$$\overline{ab} = p^1 \cdot q^5 \rightarrow \overline{ab} = 3^1 \cdot 2^5$$

$$\overline{ab} = 96$$

$$(a+b)^2 = (9+6)^2$$

$$(a+b)^2 = 225 = 3^2 \cdot 5^2$$

$$9 - 1 = 8 \text{ divisores propios}$$

Rpta. E

PROBLEMA 138

Si A tiene 42 divisores enteros, B tiene 50 divisores enteros y AB tiene 165 divisores naturales. ¿Cuántos divisores naturales tendrá AB^2 ?

A) 402 B) 403 C) 405 D) 406 E) 408

RESOLUCIÓN

$$\left. \begin{array}{l} A = p^{\alpha} \cdot q^{\beta} \\ B = p^{\gamma} \cdot r^{\delta} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha = 6 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 4 \\ \delta = 4 \end{array}$$

$$\therefore AB = p^{10} \cdot q^2 \cdot r^4$$

$$AB^2 = p^6 \cdot q^2 \cdot (p^4 \cdot r^4)^2$$

$$AB^2 = p^{14} \cdot q^2 \cdot r^8$$

$$CD_{AB^2} = (14 + 1)(2 + 1)(8 + 1)$$

$$CD_{AB^2} = 405$$

Rpta. C

PROBLEMA 139

¿Cuántos divisores cuadrados perfectos que terminan en 5 tiene el número $5\,760^{10}$?

A) 52

B) 53

C) 55

D) 56

E) 58

Resolución

Dato: $N = 5\,760^{10} \Rightarrow N = 2^{70} \cdot 3^{20} \cdot 5^{10}$

Los divisores k^2 :

$$\begin{array}{cc}
 \downarrow & \downarrow \\
 3^0 & 5^0 \\
 3^2 & 5^2 \\
 3^4 & 5^4 \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 3^{20} & 5^{10}
 \end{array}$$

Total de divisores k^2 : $11 \cdot 6 = 66$

$\therefore$ La cantidad de divisores k^2 que terminan en 5 es: $66 - 11 = 55$

PROBLEMA 141

¿Cuántos divisores de 113 400 terminan en cifra impar pero no en cifra 5?

A) 8

B) 9

C) 10

D) 11

E) 12

Resolución

Descomponiendo: $113\,400 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$

Los divisores de 113 400 que terminan en cifra impar, pero que no terminan en cifra 5, se generan solo con la combinación de los divisores de 3^4 y 7^1

∴ La cantidad de divisores que terminan cifra impar, pero no en cifra 5 es $5 \times 2 = 10$

PROBLEMA 142

Si el número $13^{k+2} - 13^k$ tiene 150 divisores compuestos enteros.
¿Cuántos divisores múltiplos de 3 pero de 6 tiene el número $\overline{k(2k)0}$?

A) 20

B) 30

C) 50

D) 60

E) 80

Resolución

Si el número $N = 13^{k+2} - 13^k$ tiene 150 divisores compuestos enteros.

Entonces: $N = 13^k \cdot 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^1$

$$CD(N) = (k+1)(4)(2)(2)$$

$$CD(comp) = (k+1)(4)(2)(2) - 5 = 75 \Rightarrow k = 4$$

$$\Rightarrow \overline{k(2k)0} = 480 = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = (2 \cdot 3)(2^4 \cdot 5^1)$$

∴ La cantidad de divisores enteros de 480 que son múltiplos de 6 es $2(5 \cdot 2) = 20$

PROBLEMA 144

¿Cuántos números primos se representan con dos cifras en el sistema nonario?

- A) 16 B) 18 C) 20 D) 21 E) 22

Resolución

Sea $N = \overline{ab}_{(9)}$ primo

$$9 \leq N < 9^2$$

→ $N = 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79$

Rpta. B

PROBLEMA 145

Determine el residuo que se obtiene al dividir 871^{220} entre 216

A) 22

B) 23

C) 25

D) 26

E) 28

Resolución

$$871^{220} = 216 + R$$

$$\Rightarrow 871^{\varphi(216)} = 871^{72} = 216 + 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 871^{220} &= 871^{3(72)} \cdot 871^4 \\ &= (216 + 1) \cdot 871^4 = (216 + 1) \cdot (216 + 7)^4 \\ &= 216 + 7^4 \\ &= 216 + 25 \end{aligned}$$

Rpta. C

PROBLEMA 146

Un número entero tiene 2 divisores primos y 12 divisores compuestos, si la suma de todos sus divisores positivos es 403, determine el producto de sus divisores y dar como respuesta la cantidad de divisores que tiene dicho producto.

- A) 496 B) 498 C) 520 D) 540 E) 550

Resolución

$$N = a^\alpha \times b^\beta \rightarrow CD(N) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{primos}}}{2} + \overset{\substack{\downarrow \\ \text{compuestos}}}{12} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{unidad}}}{1} = 15 \rightarrow CD = 3 \times 5 = (2 + 1) \times (4 + 1)$$

$$\rightarrow N = a^2 b^4$$

$$SD = 403 = 13 \times 31 = \frac{3^3 - 1}{3 - 1} \times \frac{2^5 - 1}{2 - 1} \rightarrow N = 3^2 \times 2^4 = 144$$

$$PD(N) = \sqrt{144^{15}} = 12^{15} = 2^{30} 3^{15} \rightarrow CD = 31 \times 16 = 496$$

Rpta. A

PROBLEMA 147

Si $N!$ tiene p divisores, $(N + 1)!$ tiene $2p$ divisores, N es un número de 2 cifras, múltiplo de 2 y 11 ¿Cuántos valores puede tomar N ?

A) 2

B) 3

C) 5

D) 6

E) 8

RESOLUCIÓN

*si $N!$, tiene p divisores y
 $(N + 1)!$ $2p$ divisores*

$\rightarrow N + 1$; es primo

$$N = 22 \rightarrow N + 1 = 23$$

$$N = 44 \rightarrow N + 1 = 45$$

$$N = 66 \rightarrow N + 1 = 67$$

$$N = 88 \rightarrow N + 1 = 89$$

$$\rightarrow \# = 3$$

PROBLEMA 148

Determine n , entero positivo, dado que los siguientes números: $3n-4$; $4n-5$ y $5n-3$ son primos.

A) 2

B) 3

C) 5

D) 6

E) 8

RESOLUCIÓN

$$3n - 4; 4n - 5; 5n - 3$$

$$3(n - 1) - 1; 4(n - 1) - 1; 5n - 3$$

$$\rightarrow n = 2$$

PROBLEMA 149

Para averiguar si un número natural es primo se pensaba realizar siete divisiones, pero faltando una división se determinó que el número es compuesto. Calcule la suma de cifras de dicho número nonario?

A)16

B)18

C)20

D)21

E) 22

RESOLUCIÓN

$\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17\}$

|
6ta

$$17^2 \leq 13k < 19^2$$

$$23 \leq k \leq 27$$

$$k \in \{23; 24; \dots; 27\} \text{ pero } \cancel{2} \neq \cancel{3} \neq \cancel{5} \neq \cancel{7}$$

$$k \in \{23\} \rightarrow N = 13k = 299$$

PROBLEMA 150

Determine el menor entero positivo k tal que existan enteros $a_1; a_2; \dots; a_k$ tal que $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_k^3 = 2002^{2002}$.

A) 2

B) 3

C) 4

D) 6

E) 8

RESOLUCIÓN

$$a_i = 2002^{667} m_i; \quad i \in \{1; 2; \dots; k\}$$

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_k^3 = 2002^{2001} [m_1^3 + m_2^3 + \dots + m_k^3] = 2002^{2002}$$

$$m_1^3 + m_2^3 + \dots + m_k^3 = 2002 = \overset{\circ}{9} + 4$$

Los cubos son: $m_i^3 = \overset{\circ}{9} \text{ ó } \overset{\circ}{9} \pm 1$

→ El mínimo es = 4